MODELOS DE PROBABILIDAD

El modelo de probabilidad es una expresión matemática que resulta de un cúmulo de supuestos. El modelo describe el comportamiento de una variable aleatoria si el experimento se repite bajo ciertas condiciones iniciales, y por lo tanto ayuda a predecir resultados de futuras repeticiones.

MODELOS DISCRETOS

1.- Modelo Bipuntual o de Bernoulli

Se aplica a una variable que sólo puede asumir dos valores : 0 y 1 .
Consideremos un experimento que puede presentar sólo dos resultados, que podríamos llamar Éxito y Fracaso, y una variable a la cual le asignaremos valores 0 y 1 según resulte Éxito o Fracaso respectivamente.
Es decir $\Omega = \{ E , F \}$
Entonces, definimos la variable aleatoria X como presencia o ausencia de cierta característica. Es decir :

$\omega = F \Rightarrow X(\omega) = X(F) = 0 \Rightarrow$ ausencia de la característica
$\omega = E \Rightarrow X(\omega) = X(E) = 1 \Rightarrow$ presencia de la característica

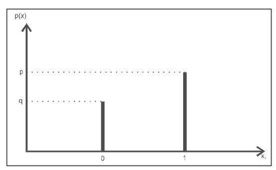
Sea p la probabilidad conocida de que se presente la característica (es decir, la proporción poblacional).

$$\therefore p = P(E) \quad \Leftrightarrow \quad P(X=1) = p$$
$$q = 1 - p = P(F) \quad \Leftrightarrow \quad P(X=0) = q = 1-p$$

ω	X_i	$p(x_i)$
F	0	q
E	1	p

La distribución de probabilidad bipuntual se expresa y grafica de la siguiente manera:

$$p(x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & para\ \ x = 0\ ,\ 1 \\ 0 & \forall\ otro\ \ x \end{cases}$$



El único parámetro de esta distribución es p = P(E), simbólicamente escribimos X ~ $B_i(p)$, y leemos X *se distribuye Bernoulli con parámetro "p"* .

La función de distribución acumulada F(x) = P(X ≤ x) se expresa y gráfica de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si & x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} p^k q^{1-k} & si & x = 0\ ,\ 1 \\ 1 & si & x > 1 \end{cases}$$

Las características de posición y dispersión son su esperanza y variancia :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x\,p(x) = 0.q + 1.p = p \quad \therefore \quad E(X) = p$$

$$V(X) = \sum_{x=0}^{1} (x-p)^2\,p(x) = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq \quad \therefore \quad V(X) = pq$$

2.-Modelo Binomial

Consideremos una serie de pruebas Bernoulli repetidas en forma independiente, donde sólo interesa la cantidad de veces que ocurre éxito. Por lo tanto, el experimento debe cumplir con las siguientes tres condiciones:
1. Debe haber un número fijo de pruebas repetidas e independientes.
2. Cada prueba debe ser dicotómica, es decir, debe resultar en éxito o fracaso .
3. La probabilidad de éxito debe ser conocida y constante para todas las pruebas, P(E)=p.

Simbolizamos con n a la cantidad de veces que se repite el experimento. La variable la simbolizamos con X y se define como X : *cantidad de éxitos ocurridos en las n repeticiones del experimento* .
Simbolizando con R_X al recorrido (o campo de variación) de la variable, tenemos que:
$R_X = \{ 0 , 1 , 2 , \dots , n \}$

Supongamos una serie de n repeticiones de pruebas Bernoulli, en la que los *éxitos y fracasos* resultaron : $\underbrace{EE\ldots E}_{k\ veces}\underbrace{FF\ldots F}_{(n-k)\ veces}$

La probabilidad de que el resultado de las n repeticiones sea esta secuencia es :

$$P(\underbrace{EE\ldots E}_{k\ veces}\underbrace{FF\ldots F}_{(n-k) veces}) = \underbrace{P(E)P(E)\ldots P(E)}_{k\ \ veces}\underbrace{P(F)P(F)\ldots P(F)}_{(n-k) veces}$$

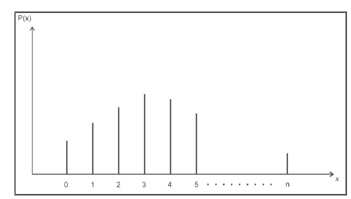
donde P(E) = p y P(F) = q

Esta secuencia que hemos considerado es una de aquellas en las que aparece k veces *éxito*. Pero no estamos interesados en una secuencia particular de *éxitos* y *fracasos*, sino en la cantidad de *éxitos*, no importando el orden. La probabilidad de cualquier secuencia de n repeticiones que contenga *k éxitos* tiene la misma probabilidad de acontecer que la que hemos presentado. La probabilidad de que ocurran exactamente *k éxitos* (y el resto fracasos), es igual a la suma de las probabilidades de las distintas secuencias que son posibles de obtener permutando los n resultados de las pruebas Bernoulli (siempre manteniendo fija la cantidad de éxitos X=k).
La cantidad de secuencias diferentes está dado por el número de permutaciones de n elementos cuando entre ellos hay k semejantes entre sí, y los restantes $n-k$ también son semejantes entre sí. Luego, existen $\binom{n}{k}$ secuencias diferentes con *k éxitos*, todas ellas con la misma probabilidad de ocurrir. Por lo tanto, la probabilidad de obtener k *éxitos* (en cualquier orden) es igual a la probabilidad de una secuencia en particular multiplicada por este número combinatorio. Así :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

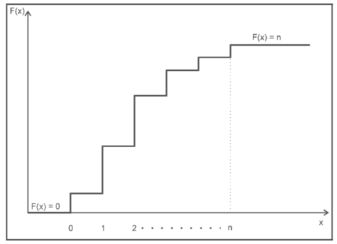
La función de cuantía de la variable binomial se expresa y se grafica de la siguiente forma :

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & si\ x = 0\ ,1, \ldots\ldots, n \\ 0 & \forall\ otro\ \ x \end{cases}$$



y la función de distribución acumulada se expresa y se grafica de la siguiente forma :

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \ \ x<0 \\ \sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} & si \ \ x=0\ ,\ 1\ ,\ldots,\ n \\ 1 & si \ \ x>n \end{cases}$$



Los parámetros de esta distribución son n y p , y simbólicamente escribimos X ~ B(n,p) y leemos X *se distribuye binomial con parámetros "n" y "p".*

La esperanza y la variancia son :

$$E(X)=np$$
$$V(X)=npq$$

Otra forma de demostrarlo es considerar la variable X = número de éxitos en las *n* repeticiones como la suma de *n* variables, o sea , $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, donde X_i es la variable que indica el número de éxitos obtenidos en la i-ésima repetición, y sólo puede asumir valor 0 o 1 , con $P(X_i = 1) = p$ y $P(X_i = 0) = q$, $\forall$ i =1 .. n . Luego todas ellas son variables Bernoulli independientes entre sí, con esperanza $E(X_i) = p$ y variancia $V(X_i) = p.q$.

$$\therefore X=\sum_{i=1}^{n}X_i, \quad \text{por lo tanto} \quad : \quad E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) \quad y \quad V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

por propiedad de la esperanza : $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}p=np$

por propiedad de variancia para variables independientes: $V(X)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\sum_{i=1}^{n}pq=npq$

3 . Modelo Hipergeométrico

Consideremos una población finita en la cual se distinguen dos clases de elementos. Supongamos que de esta población se extrae (sin reemplazo) una cantidad fija de elementos, e interesa el número de elementos pertenecientes a una de esas clases. Por lo tanto, el experimento debe cumplir con las siguientes dos condiciones :

1. Hay un número fijo de pruebas repetidas no independientes, (cada extracción es una prueba).
2. Cada prueba debe resultar en un éxito o un fracaso, (ya que cada elemento extraído pertenece a una clase o a la otra).

Se convendrá en denominar a las distintas clases como :
categoría I : constituida por los elementos que interesa contar, y
categoría II : constituida por los elementos restantes .

Simbolizamos con :

n : a la cantidad de extracciones (o pruebas repetidas)
N : a la cantidad de elementos de la población
N_1 : a la cantidad de elementos de la categoría I
N_2 = N - N_1 : cantidad de elementos de la categoría II

La variable hipergeométrica se define como X : cantidad de elementos de la categoría I que aparecen entre los "n" elementos extraídos . Considerando "éxito" cuando el elemento extraído pertenece a la categoría I , entonces podemos definir X como el n° de éxitos en las n extracciones .

Es importante tener en cuenta el recorrido de la variable, que depende del tamaño de la muestra (n) y de los tamaños de ambas categorías (N_1 y N_2) .

Si n < N_1 y n < N_2 entonces los valores posibles de la variable son x = 0 , 1 , 2 , ... , n. Siendo que *x* indica el n° de elementos que pertenecen a la categoría I, es obvio que x ≤ N_1 , además de tener que ser x ≤ n ;asi mismo, *n-x* indica el n° de elementos que pertenecen a la categoría II, luego debe verificarse que *n-x* ≤ N_2 , además de ser *n-x* ≤ n , de donde se deduce que *x* ≥ n - N y x ≥ 0 .

x ≤ mín { N_1 , n } y *x* ≥ máx { n-N_2 , 0 }

∴ R_x = { *x* e Z : máx { n-N_2 , 0 } ≤ *x* ≤ mín { N_1 , n } }

Supongamos que estamos interesados en un valor específico de la variable, digamos *X = k* . La probabilidad de que la variable asuma dicho valor (P(*X=k*)) , se calcula mediante la definición clásica de probabilidad, es decir, mediante el cociente entre la cantidad de casos favorables y los posibles dentro de un Espacio Muestra equiprobable.

Luego, el n° de casos posibles está dado por el número combinatorio $\binom{N}{n}$ que representa la cantidad de muestras posibles de extraer, todas con la misma probabilidad ; y el n° de casos favorables está dado por el producto de dos números combinatorios :

$\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}=\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$ que representa la cantidad de muestras de *n* elementos (extraída de un total de N) que contienen k elementos de la categoría I y el resto de la categoría II.

$$P(X=k)=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad para \ \ k\in R_x$$

Luego, expresamos su función de cuantía como :

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N-N_1}{n-x}}{\binom{N}{n}} & para \ \ x\in R_x \\ 0 & \forall \ otro \ x \end{cases}$$

y la función de distribución acumulada es

F(x) = P(X ≤ x) = $\sum_{k=0}^{x}P(X=k)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & para \ \ x<max\{\ n-N_2\ ,\ 0\ \} \\ \sum_{k=m}^{x}\dfrac{\binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k}}{\binom{N}{n}} & para \ \ x\in R_x \\ 1 & para \ \ x>min\{\ N_1,n\ \} \end{cases}$$

donde m = máx { n-N_2 , 0 } = mínimo valor de x .

Se verifica que p(x) es función de cuantía pues :

1. $p(x) \geq 0 \ \forall$ x
2. $\sum_{x=0}^{n} p(x) = 1$

ya que $\sum_{x \in R_x} \binom{N_1}{k}\binom{N-N_1}{n-k} = \binom{N}{n}$, puede demostrarse por inducción sobre *n*, para *N* y N_1 fijos

Los parámetros de esta distribución son N , N_1 y n , simbólicamente escribimos : X ~ H (N , N_1 , n) y leemos *X se distribuye en forma hipergeométrica con parámetros "N", "N_1" y "n"* . La esperanza y la variancia de la variable hipergeométrica están dadas por las fórmulas:

$$E(X) = n\frac{N_1}{N} \qquad y \qquad V(X) = n\frac{N_1}{N}\frac{N_2}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

Obsérvese que si las extracciones se hacen con reposición, entonces la probabilidad de que el elemento pertenezca a la categoría I se mantendría constante, ya que las n extracciones son *n* repeticiones independientes . En este caso, la variable número de elementos en la muestra que pertenecen a la categoría I ya no es una variable hipergeométrica , sino que responde a las hipótesis de una variable binomial , cuyo recorrido será x = 0 , 1 , 2 , ... n .

4. Modelo Poisson

Hay ciertos acontecimientos que suceden continuamente en forma aleatoria con una cierta tasa de ocurrencia, sobre un campo continuo (que puede ser el tiempo, una superficie, o un volumen) . Un proceso de Poisson satisface las siguientes tres hipótesis:

1. Tasa constante de ocurrencia.
2. La cantidad de acontecimientos ocurridos durante un intervalo es independiente al n° de acontecimientos ocurridos en otro intervalo (excluyente al primero).
3. La probabilidad de dos acontecimientos simultáneos es nula.

Simbolizaremos con λ al número promedio de acontecimientos ocurridos en una determinada magnitud del campo continuo sobre el cual se dan los acontecimientos .

La variable Poisson se define como *X : número de acontecimientos ocurridos en un determinado intervalo, (de tiempo, de superficie, de volumen, etc)* , y puede asumir cualquier número no negativo, es decir:

x = 0 , 1 , 2 , 3 , ...,∞

En base a las tres hipótesis consideradas se demuestra (mediante el Análisis Matemático Diferencial) que la probabilidad de que ocurran *k* acontecimientos en un intervalo está dado por la siguiente expresión :

$$P(x=k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

donde λ representa la cantidad media de ocurrencias de ese fenómeno en dicho intervalo. Obviamente, el valor de λ depende de la magnitud del intervalo, siendo proporcional al mismo ya que la tasa de ocurrencia *es constante* .

Por lo tanto , la variable Poisson tiene la siguiente función de cuantía :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} & si \quad x = 0 \ , \ 1 \ , \ ....\infty \\ 0 & \forall \ \ otro \ \ x \end{cases}$$

y la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!} & si \quad x = 0 \ , 1 \ , 2 \ ,......\infty \end{cases}$$

p(x) es función de cuantía pues verifica las dos condiciones:

1. $p(x) = \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} \geq 0 \qquad para \quad x = 0 \ , 1 \ , 2 \ , ...$
2. $\sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.\sum_{x=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

ya que $\sum_{x=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ es el desarrollo en serie de e^{λ} .

La esperanza y la variancia de la variable Poisson son:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = 0 + .\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda.\lambda^{x-1}}{x(x-1)!} = e^{-\lambda}.\lambda.\sum_{x-1=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-\lambda}.\lambda.e^{\lambda} = \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = 0 + .\sum_{x=1}^{\infty} x^2\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty}(x.(x-1)+x).\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

donde x^2 es equivalente a x.(x-1) + x . Luego :

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty}\left(x(x-1)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + x\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}\right) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!} + .\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda}.\lambda^x}{x!}$$

donde el segundo término es E(X) , y el primer sumando de la primera sumatoria es nulo, por lo tanto equivale a comenzar la sumatoria en x=2

$$E(X^2) = e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^2\lambda^{x-2}}{x(x-1)(x-2)!} + E(X) = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{x-2=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda}.\lambda^2.e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Luego la variancia es:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

$$Por \ lo \ tanto \qquad E(X) = V(X) = \lambda$$

Aplicación :

El modelo Poisson suele ser utilizado como caso limite de una variable binomial, para n muy grande y p muy pequeño. Para la practica, basta tener $n \geq 100$ y $p \leq 0.01$. En estos casos la variable X : n° de éxitos se distribuye aproximadamente Poisson con parámetro λ=n.p .

5.- Modelo Geométrico

Surge de realizar repetidas veces un experimento dicotómico hasta obtener el resultado deseado. Es decir, el nuevo experimento consiste en repetir una prueba Bernoulli tantas veces como sea necesario hasta obtener "éxito". Estas pruebas son independientes entre sí, y cada una de ellas tiene la misma probabilidad de resultar exitosa.
Simbolizamos con *p* a la probabilidad de obtener éxito en cualquiera de las pruebas, o sea, *p* = P(E), y por lo tanto la probabilidad de fracaso es P(F) = 1 – *p*.
La variable se define como X: número necesario de repeticiones hasta la obtención del éxito. Obviamente, como mínimo se necesita una prueba; por lo tanto, deberá ser x ≥ 1. Como no existe una cota superior para el n° de repeticiones necesarias, la variable puede tomar valores infinitamente grandes (cada vez con menor probabilidad). Por lo tanto, el recorrido de la variable es:

X = 1, 2, 3, ………… ∞

La probabilidad de obtener cada uno de estos valores es fácilmente calculable. Para que la cantidad de repeticiones sea un determinado número k (k ≥ 1), necesariamente debe resultar " fracaso " en las primeras k – 1 pruebas y " éxito " en la k-ésima repetición. Luego, el suceso que nos interesa es :

$$\underbrace{FFFFFFF}_{k-1\ veces}E$$

y la probabilidad de este suceso es:

$$P\left(\underbrace{FF\ldots F}_{k-1\ veces}E\right) = \underbrace{P(F).P(F)\ldots P(F)}_{k-1\ veces}P(E) =$$

$$\therefore\ P\left(\underbrace{FF\ldots F}_{k-1\ veces}E\right) = \underbrace{(1-p)\ldots(1-p)}_{k-1\ veces}.\,p = (1-p)^{k-1}.\,p$$

$$\therefore\quad P(X=k) = p\,(1-p)^{k-1}$$

Luego, la función de cuantía de la variable geométrica es:

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ldots \\ 0 & \forall\ otro\ x \end{cases}$$

y la función de probabilidad acumulada está dada por:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=1}^{x} p\,(1-p)^{k-1} = 1-(1-p)^x$$

Otra forma de calcular F(x) es considerando una variable auxiliar, de distribución binomial.
Sea el suceso A = [X ≤ k] . Definamos la variable binomial con parámetros *k* y *p* . O sea, Y ~ B (k, p). Podemos calcular la probabilidad del suceso A utilizando la variable Y, mediante su complemento :

$$\overline{A} = [X > k] = [Y = 0] = \underbrace{FF\ldots F}_{k\ veces}$$

$$P(\overline{A}) = P(X > k) = P(Y = 0) = (1-p)^k$$

$$P(X \le k) = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(X > k) = 1 - P(Y = 0) = 1-(1-p)^k$$

$$\therefore\ P(X \le k) = 1-(1-p)^k \qquad para\ valores\ de\ k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ldots\ldots$$

Por lo tanto su expresión es la siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & para \quad x < 1 \\ 1-(1-p)^x & para \quad x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \end{cases}$$

Puede verificarse que p(x) es función de cuantía, ya que :

1. $p(x) = p(1-p)^{x-1} \ge 0 \quad \forall \quad x \in R$
2. $\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p\,(1-p)^{x-1} = p.1/p = 1$

El único parámetro de esta distribución es *p* , simbólicamente escribimos X ~ G (*p*) y leemos X se distribuye geométricamente con parámetro *p* .
La esperanza y la variancia de la variable geométrica son:

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\,p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x.p.(1-p)^{x-1} = p.\sum_{x=1}^{\infty} x.(1-p)^{x-1}$$

donde $x.(1-p)^{x-1} = -\dfrac{\partial}{\partial p}\left[(1-p)^x\right]$

$$\therefore\ \sum_{x=1}^{\infty} x.(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{\partial}{\partial p}(1-p)^x\right] = -\frac{\partial}{\partial p}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x = -\frac{\partial}{\partial p}\left[(1-p).\frac{1}{p}\right] = -\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{p}-1\right] = \frac{1}{p^2}$$

Luego, $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x.p.(1-p)^{x-1} = p.\sum_{x=1}^{\infty} x.(1-p)^{x-1} = p.\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{p}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

siendo $E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\,.p.(1-p)^{x-1} = \sum_{x=1}^{\infty}[x(x+1)-x].p.(1-p)^{x-1}$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x+1).p.(1-p)^{x-1} - \sum_{x=1}^{\infty} x.p.(1-p)^{x-1} = p.\sum_{x=1}^{\infty} x(x+1).(1-p)^{x-1} - E(X)$$

donde $x(x+1).(1-p)^{x-1} = \dfrac{\partial^2}{\partial p^2}(1-p)^{x+1}$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left[x(x+1).(1-p)^{x-1}\right] = \sum_{x=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial p^2}(1-p)^{x+1}\right] = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x+1} = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[(1-p)^2.\frac{1}{p}\right]$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left[x(x+1).(1-p)^{x-1}\right] = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[(1-2p+p^2).\frac{1}{p}\right] = \frac{\partial^2}{\partial p^2}\left[\frac{1}{p}-2+p\right] = \frac{2}{p^3}$$

$$E(X^2) = p.\sum_{x=1}^{\infty} x(x+1).(1-p)^{x-1} - E(X) = p.\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \left[\frac{1}{p}\right]^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Luego, $E(X) = \dfrac{1}{p}$ $\qquad V(X) = \dfrac{q}{p^2}$